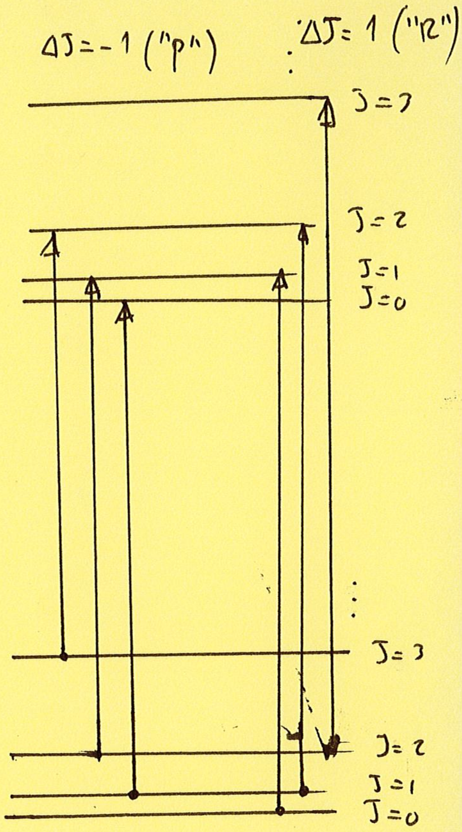
1.

1.1.

niveaux :



$E_f = E(n=1) + BJ(J+1)$

$\Delta E(J \to J+1) = h\nu_0 + 2B(J+1)$

rég. de sel : $\Delta J = 1$

$\Delta E(J \to J-1) = h\nu_0 - 2BJ$

$E_i = E(n=0) + BJ(J+1)$

1.2. Separation des raies $\approx 2B$ avec $B = \frac{\hbar^2}{2\mu r_0^2}$

$\Rightarrow$ mom. d'inertie, (ou, avec masses connues : dist. r_0)

1.3. distortion centrifuge : effet au délà approx rot. rigide, chmt de mom d'inertie (r_0) avec J (rotation)

1.4. intensité donné par distr. Boltzmann de l'état initial :

$N(J) = N_0 (2J+1)\, e^{-\frac{BJ(J+1)}{kT}}$, max pour $\frac{dN}{dJ} = 0$

$T = \frac{B}{2k}(2J_{max}+1)^2$

1 - $\hat{H}_{HF} = A\,\hat{I}\cdot\hat{J}$ $\qquad \hat{F} = \hat{I} + \hat{J}$

Calcul dans la base "couplée" : états propres communs à (I^2, J^2, F^2, F_3).

$$\hat{I}\hat{J} = \frac{1}{2}\left[\hat{F}^2 - \hat{I}^2 - \hat{J}^2\right].$$

$$\Delta E_{HF} = \frac{A\hbar^2}{2}\left[F(F+1) - I(I+1) - J(J+1)\right].$$

2 - $n = 2$ $\begin{cases} \ell = 0 & j = \frac{1}{2} \\ \ell = 1 & j = \frac{1}{2}, \frac{3}{2} \end{cases}$ $\qquad 2s_{1/2} \qquad 2p_{1/2} \quad 2p_{3/2}$

structure hyperfine : $|I - j| \leq F \leq I + j$

$2s_{1/2} \to F = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}$ $\qquad A\hbar^2 = 81{,}7 \times \dfrac{1}{\frac{1}{2}\frac{3}{2}\times 8\,\frac{1}{2}} = \dfrac{81{,}7}{3} \simeq 27{,}23\ \text{MHz}$

pts

$2p_{1/2} \to F = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}$ $\qquad A\hbar^2 = 81{,}7 \times \dfrac{1}{\frac{1}{2}\frac{3}{2}\times 8 \times \frac{3}{2}} = \dfrac{81{,}7}{9} \simeq 9{,}077\ \text{MHz}$

$2p_{3/2} \to F = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}$ $\qquad A\hbar^2 = 81{,}7 \times \dfrac{1}{\frac{3}{2}\frac{5}{2}\times 8 \times \frac{3}{2}} = \dfrac{81{,}7}{45} \simeq 1{,}815\ \text{MHz}$

3 - Calcul de la correction énergétique associée à interaction hyperfine

$2s_{1/2}$ $\quad F = \frac{1}{2}$ $\qquad \Delta E_{HF} = \dfrac{27{,}23}{2}\left[\cancel{\tfrac{1}{2}\tfrac{3}{2}} - 2 - \cancel{\tfrac{1}{2}\tfrac{3}{2}}\right] = -\,27{,}23\ \text{MHz}.$

$F = \frac{3}{2}$ $\qquad \Delta E_{HF} = \dfrac{27{,}23}{2}\Big[\underbrace{\tfrac{3}{2}\tfrac{5}{2} - 2 - \tfrac{1}{2}\tfrac{3}{2}}_{1}\Big] = +\dfrac{27{,}23}{2} = 13{,}61$

$2p_{1/2}$ $\quad F = \frac{1}{2}$ $\qquad \Delta E_{HF} = \dfrac{9{,}077}{2}\left[\cancel{\tfrac{1}{2}\tfrac{3}{2}} - 2 - \cancel{\tfrac{1}{2}\tfrac{3}{2}}\right] = -\,9{,}077$

$F = \frac{3}{2}$ $\qquad \Delta E_{HF} = \dfrac{9{,}077}{2}\left[\ 1\ \right] = \dfrac{9{,}077}{2} = 4{,}54$

$2p_{3/2}$ $\quad F = \frac{1}{2}$ $\qquad \Delta E_{HF} = \dfrac{1{,}815}{2}\left[\tfrac{1}{2}\tfrac{3}{2} - 2 - \tfrac{3}{2}\tfrac{5}{2}\right] = \dfrac{1{,}815}{2}\times(-5) = -\,4{,}54$

$F = 3/2$ $\qquad \Delta E_{HF} = \dfrac{1{,}815}{2}\left[\cancel{\tfrac{3}{2}\tfrac{5}{2}} - 2 - \cancel{\tfrac{3}{2}\tfrac{5}{2}}\right] = -\,1{,}815$

$2p_{3/2}$ $F = \frac{5}{2}$ $\Delta E_{HF} = \frac{1{,}815}{2}\left[\frac{5}{2}\frac{7}{2} - 2 - \frac{3}{2}\frac{5}{2}\right] = 2{,}72\ MHz$

4 - Effet LAMB $\gg$ structure hyperfine de $n = 2$

Structure fine = ?

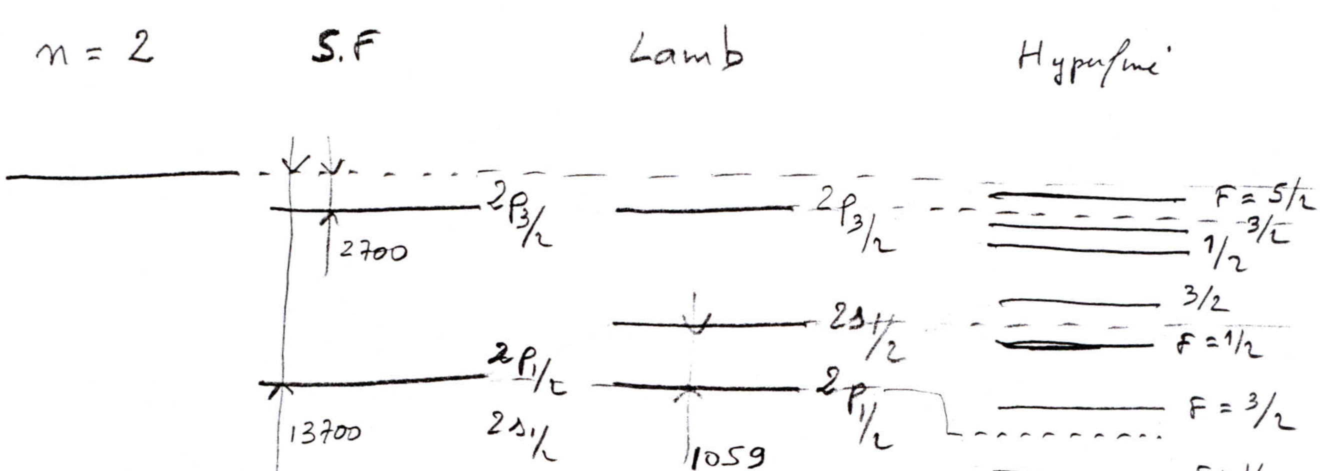
$$\Delta E_{SF} = \frac{+ mc^2 Z^4 \alpha^4}{2n^3}\left[\frac{3}{4n} - \frac{2}{2j+1}\right].$$

pour $n = 2$ $\frac{mc^2 Z^4 \alpha^4}{2n^3} = \frac{3{,}29.10^9 \times \left(\frac{1}{137}\right)^2 \times 1^2}{8} = 2{,}19\ 10^4\ MHz$

$\boxed{\text{pts}}$ $n = 2$ $j = \frac{1}{2}$ $(2s_{1/2}, 2p_{1/2})$ $\Delta E_{SF} = 2{,}19.10^4\left[\frac{3}{8} - \frac{2}{1+1}\right] = -1{,}37.10^4$

$j = \frac{3}{2}$ $(2p_{3/2})$ $\Delta E_{SF} = 2{,}19.10^4\left(\frac{3}{8} - \frac{2}{3+1}\right) = -0{,}27.10^4$

d'où le diagramme :



L'effet Zeeman orbital. Exercice standard utilisant la théorie des perturbations et assez proche de la PC4 sur l'effet Stark. Dans cet exercice, on néglige la variable interne de spin.

1) On notera les états propres de l'atome d'hydrogène $|nlm>$ avec $< \mathbf{r}|nlm >= \psi_{nlm}(\mathbf{r}) = R_{nl}(r)Y_{lm}(\theta,\phi)$, Y_{lm} harmonique sphérique telle que $\hat{\mathbf{L}}^2 Y_{lm} = \hbar^2 l(l+1)Y_{lm}$ et $\hat{L}_z Y_{lm} = m\hbar Y_{lm}$.

L'hamiltonien de perturbation s'écrit : $\hat{H}_{mag} = q\hat{L}_z B/(2m_e)$ avec l'opérateur $\hat{L}_z$ qui agit sur les états propres $|nlm>$ de l'atome d'hydrogène selon : $\hat{L}_z|nlm >= m\hbar|nlm >$. L'état fondamental $|100>$ est non-dégénéré et on applique donc la théorie de perturbation au premier ordre dans le cas non-dégénéré (question A3 de la PC4 et cours page 195) : $\Delta E =< 100|H_{mag}|100 >$ qui est nul puisque m=0 pour le fondamental. Au premier ordre, il n'y a pas de déplacement.

2) Le niveau (n=2) est dégénéré 4-fois puisque l'état $|200>$ (état 2s avec n=2, l=m=0) et les états $|21m>$ (état 2p avec n=2, l=1, m=-1,0,1) sont à la même énergie $E_2 = -E_I/n^2$ avec n=2 (E_I= 1 rydberg=13.6 eV). Il faut donc appliquer la théorie de perturbation d'un niveau dégénéré (question C de la PC4 et cours page 195-196), c'est-à-dire **diagonaliser la restriction de la perturbation H_{mag} au**

sous-espace (n=2).

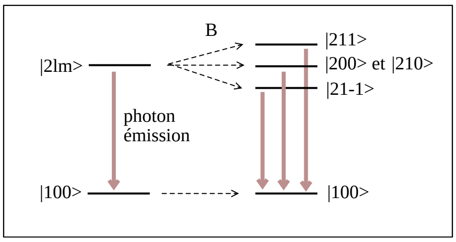
Dans le cas présent, la diagonalisation est triviale car les états $|nlm>$ sont des états propres de H_{mag} avec $H_{mag}|nlm>= m(qB\hbar/2m_e)|nlm>$. H_{mag} est donc diagonal dans la base $|2lm>$ du niveau (n=2). Les états avec (m=0) ne sont pas déplacés (états 2s et $2p_z$) alors que les états $|21m>$ avec m=$\pm$1 sont déplacés de $\pm(qB\hbar/2m_e)$. Il y a levée partielle de la dégénerescence et apparition de 3 niveaux d'énergie dont la séparation $(qB\hbar/2m_e)$ croît avec le champ.

Attention : en général, la perturbation n'a aucune raison d'être diagonale dans la base choisie du sous-espace considéré. Ne prendre que les termes $< n|\hat{W}|n >$ sur la diagonale (avec les notations de la PC4) est donc faux ! ! Il faut vraiment diagonaliser la matrice $[W_{nm}] =< n|\hat{W}|m >$ dans le sous-espace de dégénerescence pour avoir les corrections aux énergies et les vecteurs propres perturbés.

3) Résultats inchangés car l'atome d'hydrogène est un système à symmétrie sphérique.

4) On calcule : $qB\hbar/2m_e = 5.8 \times 10^{-6}$ eV qui est bien négligeable devant la différence d'énergie entre le niveau n=2 et les niveaux voisins n=1 et n=3, avec $E_n^0 = -13.6/n^2$ eVs.

4) Comme nous l'avons vu, le niveau n=1 ne bouge pas au première ordre et le niveau n=2 est éclaté en trois sous niveau. La raie d'émission (n=2 $\rightarrow$ n=1) devient triple quand on allume le champ magnétique.



5) **Complément.** Voir correction paragraphe 5.3 page 322 du cours).